



Universidad de Talca
Campus Curicó

NOTA

Prueba N° 3

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Módulo:	Carrera:	Sección:

- Instrucciones:**
- **NO HAY CONSULTAS.**
 - Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
 - Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
 - Los útiles (lápiz, goma, etc.) son de uso personal.
 - Recuerde que debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificado con nota mínima.
 - Queda prohibido el uso de calculadoras y formulario.
 - Apagar y guardar sus **celulares**.

$$\text{Nota} = 1 + \frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración = 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) [10 ptos.]

Dado el siguiente polinomio $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - 3x + 6$. Determinar cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuales son falsas. Justificar, en todos los casos, su respuesta.

- a) El cuociente de dividir $p(x)$ por $(x^2 - 2)$ es $(x^2 + x - 1)$.
- b) 2 es raíz de $p(x)$.
- c) $(x + 1)$ es un factor de $p(x)$.
- d) Su factorización en $\mathbb{R}$ es $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x^2 - 3)$
- e) El grado del polinomio $h(x) = p(x) - x(x^3 - 3x + 1)$ es 4.

Puntaje: 1 o 2 correctas: 0 pts. 3 correctas: 5 pts. 4 correctas: 8 pts. 5 correctas: 10 pts.

Solución:

- a) **FALSO**, ya que el cuociente es $x^2 + x - 3$
- b) **FALSO**, ya que $p(2) = 4 \neq 0$
- c) **FALSO**, ya que $p(-1) = 4 \neq 0$
- d) **FALSO**, ya que $p(x) = (x - 1)(x + 2)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$
- e) **FALSO**, ya que $h(x) = p(x) - x(x^3 - 3x + 1) = x^3 - 2x^2 - 4x + 6$

2) [20 pts.]

Los alumnos de las 4 secciones del curso de Álgebra, que son 200 en total, han decidido hacer un paseo a la playa de Iloca. La empresa de transporte contactada por la universidad, posee 8 minibuses de 40 asientos y 10 buses de 50 asientos. El alquiler de cada bus es de \$80000 y de un minibus \$60000. Usando las técnicas de programación lineal, determinar cuántos vehículos de cada tipo hay que utilizar para que el paseo resulte lo más económico posible.

Puntaje: *Planteamiento del problema:* 5 pts. *Solución final:* 15 pts.

Solucion:

x : n° de minibuses

y : n° de buses

Minimizar $F(x, y) = 80000x + 60000y$

Sujeta a:
$$\begin{cases} 40x + 50y \geq 200 \\ x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

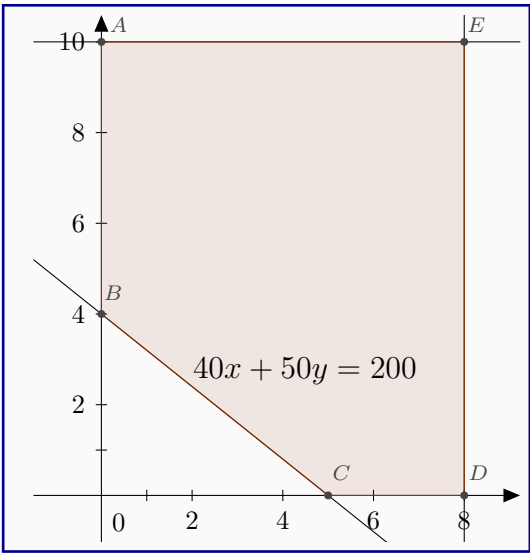


Tabla de valores

Vértices	$F = 80000x + 60000y$
$A = (0, 4)$	320000
$B = (5, 0)$	300000 ←
$C = (8, 0)$	480000
$D = (8, 10)$	1280000
$E = (0, 10)$	800000

Por lo que se necesitan 5 minibuses para obtener el costo mínimo.

- 3) a) [15 ptos.] Reconocer, en cada uno de los siguientes casos, el tipo de curva cuya ecuación se da a continuación. Indicar para cada una de ellas, sus elementos principales (centro, radio, focos; según corresponda).
- i) $2y^2 - 8x - 24y + 56 = 0$ ii) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y = 11$ iii) $3x^2 - 12y^2 - 48y - 60 = 0$

Solución:

i)

$$\begin{aligned}
 2y^2 - 8x - 24y + 56 &= 0 \\
 2(y^2 - 12y) - 8x &= -56 \\
 2((y - 6)^2 - 36) - 8x &= -56 \\
 2(y - 6)^2 - 72 - 8x &= -56 \\
 2(y - 6)^2 &= 8x + 16 \\
 (y - 6)^2 &= 4(x + 2)
 \end{aligned}$$

Es una parábola con Vértice $V = (-2, 6)$, Directriz $x = -3$ y foco $F = (-1, 6)$

ii)

$$\begin{aligned}
 4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y &= 11 \\
 4(x^2 - 4x) + 9(y^2 - 2y) &= 11 \\
 4((x - 2)^2 - 4) + 9((y - 1)^2 - 1) &= 11 \\
 4(x - 2)^2 + 9(y - 1)^2 &= 36 \\
 \frac{(x - 2)^2}{3^2} + \frac{(y - 1)^2}{2^2} &= 1
 \end{aligned}$$

Es una elipse con centro $C = (2, 1)$ Focos $F_1 = (2 + \sqrt{5}, 1)$, $F_2 = (2 - \sqrt{5}, 1)$, Vértices $V_1 = (-1, 1)$, $V_2 = (2, 3)$, $V_3 = (5, 1)$, $V_4 = (2, -1)$

iii)

$$\begin{aligned}
 3x^2 - 12y^2 - 48y - 60 &= 0 \\
 3x^2 - 12(y^2 + 4y) - 60 &= 0 \\
 3x^2 - 12((y + 2)^2 - 4) - 60 &= 0 \\
 3x^2 - 12(y + 2)^2 + 48 - 60 &= 0 \\
 3x^2 - 12(y + 2)^2 &= 12 \\
 \frac{x^2}{2^2} - \frac{(y + 2)^2}{1^2} &= 1
 \end{aligned}$$

Es una hipérbola con Centro $C = (0, -2)$, Focos $F_1 = (-\sqrt{5}, -2)$, $F_2 = (\sqrt{5}, -2)$ Vértices $V_1 = (2, -1)$, $V_2 = (-2, -1)$

- b) [15 ptos.] Sean $A = (-5, 4)$ y $B = (3, -2)$ puntos en el plano y sea C la circunferencia, con un diámetro el segmento AB . Hallar las rectas tangentes a la circunferencia que son perpendiculares a la recta $x + y + 7 = 0$

Solución: La ecuación de la circunferencia es

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

y la forma de la recta es

$$y = x + b$$

reemplazando tenemos que:

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 + (x + b - 1)^2 &= 25 \\ 2x^2 + 2bx + b^2 - 2b - 23 &= 0\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}4b^2 - 8(b^2 - 2b - 23) &= 0 \\ -4b^2 + 16b + 184 &= 0\end{aligned}$$

Por lo que $b = 2 \pm 5\sqrt{2}$ Luego las tangentes buscadas son:

$$y = x + (2 \pm 5\sqrt{2})$$